Grado en Matemáticas – Análisis Matemático I

1. Definamos $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ por
$$\rho(x, y) = \left|e^x - e^y\right| \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
Prueba que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$ equivalente a la usual. ¿Es completo el espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$?.

2. Sea ℓ_∞ el espacio normado de las sucesiones acotadas de números reales con la norma uniforme, es decir, $\ell_\infty = (\mathcal{B}(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$. Prueba que el subespacio c de las sucesiones convergentes es cerrado en ℓ_∞.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar dado para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ por:
$$f(x, y) = \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
y $f(0, 0) = 0$. Prueba que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y estudia la existencia de las derivadas parciales de segundo orden de f en $(0, 0)$.

4. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares definidos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{a} \in \Omega$ y supongamos que f es diferenciable en $\mathbf{a}$, $f(\mathbf{a}) = 0$ y g es continua en $\mathbf{a}$. Prueba que fg es diferenciable en $\mathbf{a}$.

5. Clasifica los puntos críticos del campo escalar $f :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ dado por
$$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y).$$

6. Responde una de las preguntas:

   a) Teorema de Riesz.

   b) Condición suficiente de diferenciabilidad.

Granada, 20 de diciembre de 2016